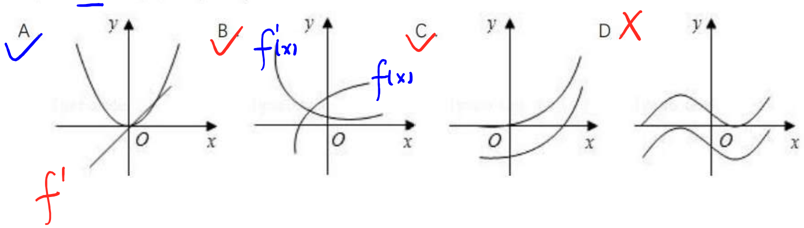
2. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中，不可能正确的是（　　）



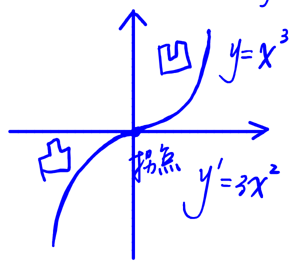
跟着显哥走，高考你都有！

第 2 讲：函数应用之单调性问题（1）

题型一：单调性基本概念

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$ ✓

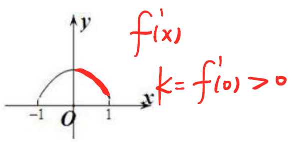
$f'(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$ ✓



$f'(x)=3x^2$

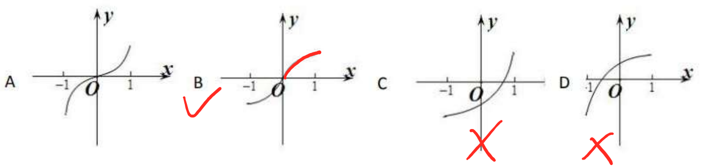
$f'(0)=0.$

3. （2013 浙江文）已知函数 y=f(x)的图像是下列四个图像之一，且其导函数 y=f'(x)的图像如右图所示，则该函数的图像是

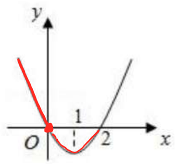


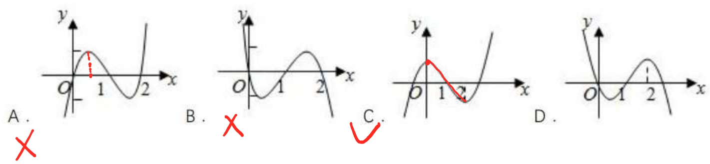
$f'(x)$ 偶函数

$f(x)$ 奇函数.



1. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图所示，则 $y=f(x)$ 的图象最有可能的是





5. 必须会画的赫赫有名的超越函数

(1) $y=xe^x$

(2) $y=\frac{x}{e^x}$

(3) $y=\frac{e^x}{x}$

(4) $y=x+e^x$

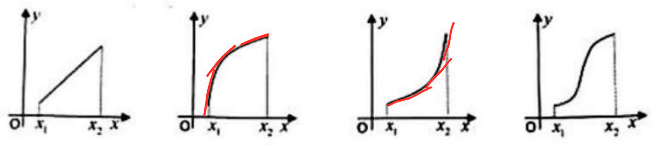
$x\to-\infty$

$xe^x=(-\infty)\cdot(+0)\to-0$

$\frac{+\infty}{-0}\to-\infty$

4. 若函数 $y=f'(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 内是单调递减函数，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 内的图象可以是（　）

$f'(x)\downarrow$



A.　　B.　　C.　　D.

$f'(x)\uparrow$ 后 $\downarrow$

$f'(x)\uparrow$

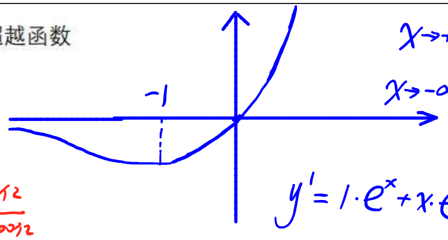
5. 必须会画的赫赫有名的超越函数

(1) $y=xe^x$

(2) $y=\frac{x}{e^x}$　$\frac{小+\infty}{大+\infty}=\frac{1亿}{3000亿}$

(3) $y=\frac{e^x}{x}$

(4) $y=x+e^x$



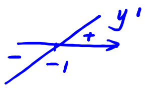
$x\to+\infty$　$y\to+\infty$

$x\to-\infty$　$(-\infty)\cdot(+0)\to-0$

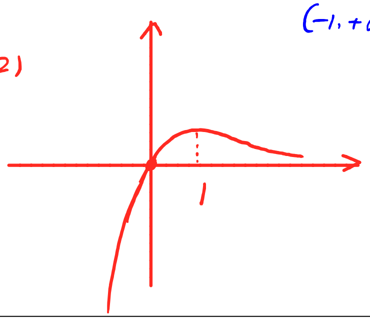
$y'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)\cdot e^x$

$(-\infty,-1)\downarrow$

$(-1,+\infty)\uparrow$



(2)



$x\to-\infty$　$\frac{x}{e^x}=\frac{-\infty}{+0}$

$\to-\infty$

5. 必须会画的赫赫有名的超越函数　① 极限运算

(1) $y=xe^x$　$\frac{2}{+\infty}=\frac{2}{1000000000000000}\to+0$

(2) $y=\frac{x}{e^x}$　$\frac{2}{-\infty}=\frac{2}{-100000000}\to-0$

(3) $y=\frac{e^x}{x}$　$\frac{2}{+0}=\frac{2}{+0.0000001}\to+\infty$

(4) $y=x+e^x$　$\frac{2}{-0}=\frac{2}{-0.0000001}\to-\infty$

$x\to+\infty$

$\underset{指爆}{a^x(a>1)}>\underset{1亿}{x^3}>x^2>x>\sqrt{x}>\ln x$

$(+\infty)-(+\infty)\to+\infty$

$3000亿-1亿$

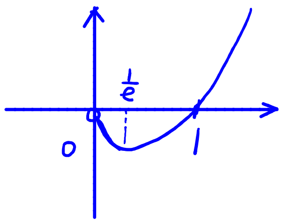
(5) $y = x\ln x$

(6) $y = \frac{\ln x}{x}$

$x \to +0$ $\frac{-\infty}{+0} \to -\infty$

(7) $y = x - \ln x$

(8) $y = \frac{x}{\ln x}$



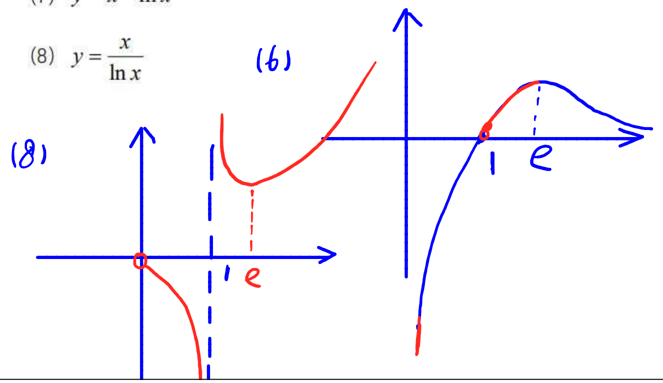
$y' = \ln x + 1$

$\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

(6)

(8)



5. 必须会画的赫赫有名的超越函数

(1) $y = xe^{x}$

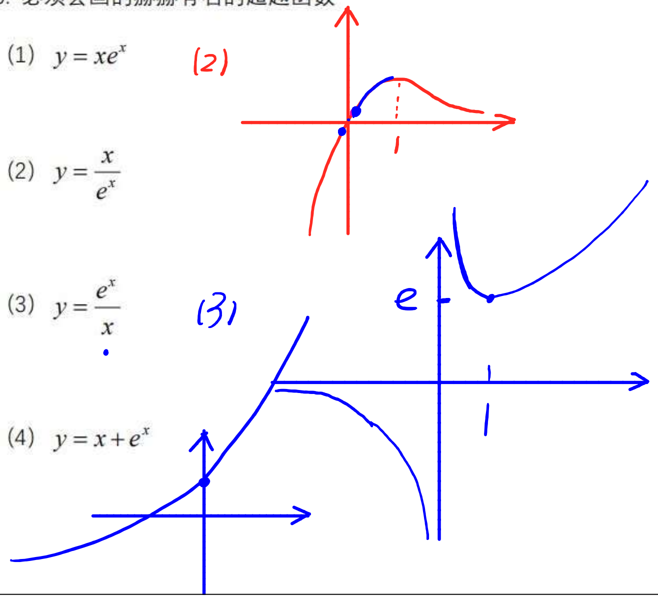
(2) $y = \frac{x}{e^{x}}$

(3) $y = \frac{e^{x}}{x}$

(4) $y = x + e^{x}$

(2)

(3)



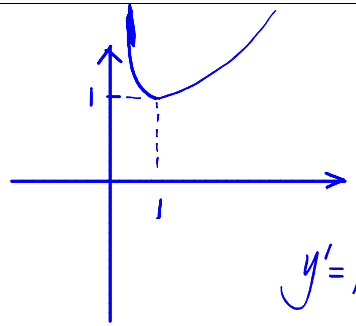
(5) $y = x\ln x$

(6) $y = \frac{\ln x}{x}$

(7) $y = x - \ln x$

(8) $y = \frac{x}{\ln x}$

(7)



$x - 1 \geq \ln x$

$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$(0,1)\downarrow$ $(1,+\infty)\uparrow$

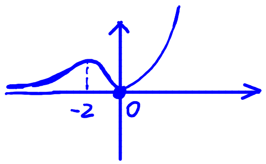
$x \to +0$

$(+0) - (\ln 0) \to +\infty$

$\dot{3} =:$ $y = x^2 e^{x}$

$x \to -\infty$ $y \to +0$

$(+\infty)\cdot(+0) \to +0$



(5) $y = x\ln x$

(6) $y = \frac{\ln x}{x}$

(7) $y = x - \ln x$

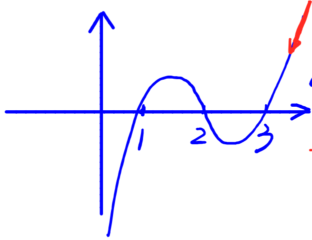
(8) $y = \frac{x}{\ln x}$

(5) 穿根法: $y = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$ 从上往下穿

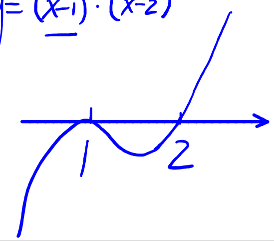
从右往左穿

每括号↑已数

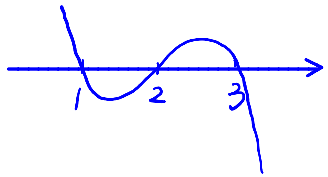
奇穿偶不穿



$y = (x-1)^2\cdot(x-2)^1$



$y = (1-x)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$



8. 已知函数 $f(x)=e^{ax}+3x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

$f'(x)=ae^{ax}+3$

$ae^{ax}=-3$

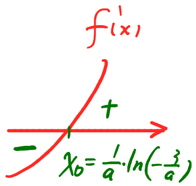
$e^{ax}=-\frac{3}{a}$

$ax=\ln(-\frac{3}{a})$

$x=\frac{1}{a}\cdot\ln(-\frac{3}{a})$

① $a\geq0$时 $f'(x)>0$ ∴$f(x)$在R↑

② $a<0$时 令$f'(x)=0$ 解 $x_0=\frac{1}{a}\ln(-\frac{3}{a})$



$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a}\cdot\ln(-\frac{3}{a}))$↓ $(\frac{1}{a}\cdot\ln(-\frac{3}{a}),+\infty)$↑

题型二：含参讨论之导后“一次”型 导后一次函数基本功.

6. 已知 $f(x)=ax-\ln(x+1)-1$，求 $f(x)$ 的单调区间.

$f'(x)=a-\frac{1}{x+1}=\frac{a(x+1)-1}{x+1}$，$(x>-1)$

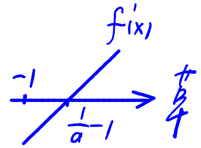
$a(x+1)=1$

$x+1=\frac{1}{a}$

① $a\leq0$时

$f'(x)<0$ ∴$f(x)$在$(-1,+\infty)$↓

② $a>0$时 令$f'(x)=0$ 解 $x_0=\frac{1}{a}-1$



当$x\in(-1,\frac{1}{a}-1)$时 $f'(x)<0$ ∴$f(x)$在$(-1,\frac{1}{a}-1)$↓

当$x\in(\frac{1}{a}-1,+\infty)$时 $f'(x)>0$ ∴$f(x)$在$(\frac{1}{a}-1,+\infty)$↑

综上所述：

1° $a\leq0$时 $f(x)$ $(-1,+\infty)$↓

2° $a>0$时 $f(x)$在( )↓ ( )↑

$(a^x)'=a^x\ln a$

9. （2021浙江）设 a,b 为实数，且 $a>1$，函数 $f(x)=a^x-bx+e^2$（$x\in R$）.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间;

$f'(x)=a^x\cdot\ln a-b$

草：$a^x\ln a=b$

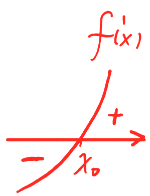
$a^x=\frac{b}{\ln a}$

取对

$x=\log_a(\frac{b}{\ln a})$

① $b\leq0$时，$f'(x)>0$ ∴$f(x)$在R↑

② $b>0$时 令$f'(x)=0$ $x_0=\log_a(\frac{b}{\ln a})$



∴$f(x)$在$(-\infty,\log_a(\frac{b}{\ln a}))$↓ $(\log_a(\frac{b}{\ln a}),+\infty)$↑

总结：导后一次型，主讨论$f'(x)$恒+or恒-情况

7. 已知 $f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$，$\cancel{x}\geq-1$，求 $f(x)$ 的单调区间.

$f'(x)=a-\frac{a+1}{x+1}=\frac{a(x+1)-(a+1)}{x+1}=\frac{ax-1}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$

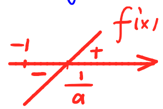
① $a=0$时 $f'(x)<0$ ∴$f(x)$在$(-1,+\infty)$↓

综上 ① $-1\leq a\leq0$ $f(x)$在$(-1,+\infty)$↓

② $a>0$时 —.

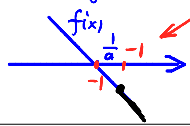
③ $a<-1$时 —.

② $a>0$时 令$f'(x)=0$ $x_0=\frac{1}{a}$



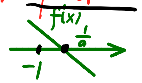
$f(x)$在$(-1,\frac{1}{a})$↓ $(\frac{1}{a},+\infty)$↑

③ $a<0$时 令$f'(x)=0$ $x_0=\frac{1}{a}$



1° $\frac{1}{a}\leq-1$ 即 $-1\leq a<0$ $f'(x)<0$ ∴$f(x)$在$(-1,+\infty)$↓

2° $a<-1$时



$f(x)$在$(-1,\frac{1}{a})$↑ $(\frac{1}{a},+\infty)$↓

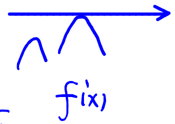
11. 设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{x-1}{x+1}$ 其中 a 为常数．讨论函数 $f(x)$ 的单调性．

$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+2x}{x(x+1)^2}=\frac{ax^2+(2a+2)x+a}{x(x+1)^2}$，$(x>0)$

① $a\ge0$时 $f'(x)>0$ ∴ $f(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$

② $a<0$时 $\Delta=(2a+2)^2-4a^2=8a+4$

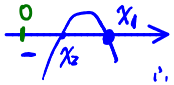
1° $a\le-\frac12$时 $f'(x)\le0$ ∴ $f(x)$在$(0,+\infty)\downarrow$



2° $-\frac12<a<0$时 令$f'(x)=0$. $x_1=\frac{-(2a+2)-\sqrt{8a+4}}{2a}=\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a}$ 大

$x_2=\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a}$ 小　$x_1+x_2=-\frac{2a+2}{a}>0$

$x_1x_2=1>0$ ∴ $x_1>0$ $x_2>0$



∴ $f(x)$在$(0,x_2)\downarrow$ $(x_2,x_1)\uparrow$ $(x_1,+\infty)\downarrow$

题型三：含参讨论之导后“二次”型

① 不能因式分解
② 能因式分解

先瞪眼，恒成立．

10. 已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax(a\in R)$，求 $f(x)$ 的单调区间.

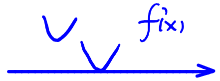
ln 定义域 >0

$f'(x)=\frac1x+2x-a=\frac{2x^2-ax+1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

① $a\le0$时 $f'(x)>0$ ∴ $f(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$

$a>0$

② $\Delta=a^2-4\cdot2\cdot1\le0$ 即 $0<a\le2\sqrt2$



不能因式分解
用求根公式

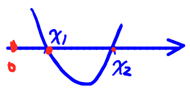
$f'(x)\ge0$ ∴ $f(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$

综上：① $a\le2\sqrt2$时 $f(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$
② $a>2\sqrt2$时

定义域为$(0,+\infty)$时 用韦达定理判断

③ $a>2\sqrt2$时，令$f'(x)=0$. $\boxed{x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\quad x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}}$

$x_1+x_2=\frac a2>0$　$x_1x_2=\frac12>0$　∴ $x_1>0$，$x_2>0$



∴ $f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})\uparrow$ $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})\downarrow$ $(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)\uparrow$

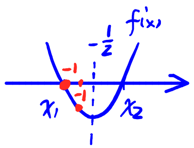
12. 已知函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$，$b\ne0$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

$f'(x)=2x+\frac{b}{x+1}=\frac{2x^2+2x+b}{x+1}$，$(x>-1)$

① $\Delta=4-4\cdot2\cdot b\le0$ 即 $b\ge\frac12$时

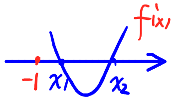
$f'(x)\ge0$　$f(x)$在$(-1,+\infty)\uparrow$

② $b<\frac12$时 令$f'(x)=0$. $x_1=\frac{-2-\sqrt{4-8b}}{4}=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$. $x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$



1° $2-2+b\le0$ 即 $b\le0$时　$x_1\le-1$，不在定义域

∴ $f(x)$在$(-1,x_2)\downarrow$ $(x_2,+\infty)\uparrow$



2° $0<b<\frac12$　$f(x)$在$(-1,x_1)\uparrow$ $(x_1,x_2)\downarrow$ $(x_2,+\infty)\uparrow$

题型三：含参讨论之导后“二次”型

10. 已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax(a\in R)$，求 $f(x)$ 的单调区间.

步骤：$f'(x)$ 二次型．不能因式分解

① 观察恒成立

② $\Delta\le0$

③ $\Delta>0$时有2根．若 $x\in(0,+\infty)$，用韦达定理判断两根是否在定义域

15. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\dfrac{1-a}{x}-1(a\in R)$.讨论 $f(x)$ 的单调性;

13. （2015 山东）设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+a(2x-1)=\dfrac{a(2x-1)\cdot(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{2ax^2+ax+1-a}{x+1}.\ (x>-1)$

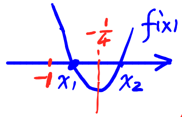
① $a=0$时 $f(x)=\ln(x+1)$ 是在$(-1,+\infty)\uparrow$

② $a>0$时 $\Delta=a^2-4\cdot 2a\cdot(1-a)=9a^2-8a=a(9a-8)$

1° $0<a\le\frac{8}{9}$

$\therefore f(x)$在$(-1,+\infty)\uparrow$

2° $a>\frac{8}{9}$

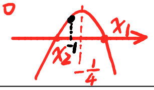


令$f'(x)=0$. $x_1=\dfrac{-a-\sqrt{9a^2-8a}}{4a}$, $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{9a^2-8a}}{4a}$

$g(-1)=2a-a+1-a=1>0$

$f(x)$在$(-1,x_1)\uparrow$ $(x_1,x_2)\downarrow$ $(x_2,+\infty)\uparrow$

③ $a<0$时 $\Delta>0$



$g(-1)=1>0$ $\therefore x_2<-1$不在定义域内, $f(x)$在$(-1,x_1)\uparrow$ $(x_1,+\infty)\downarrow$

16. （2021 全国 II 文改编）设函数 $f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$，讨论 $f(x)$ 的单调性;

14. 已知函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2-(2a+1)x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

19. (2016 山东理)已知 $f(x)=a(x-\ln x)+\dfrac{2x-1}{x^2},a\in R$.讨论 $f(x)$ 的单调性;

17. (2016 新课标Ⅰ)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.讨论 $f(x)$ 的单调性;

20. 已知函数 $f(x)=(ax^2-x)\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

18. （2021 新高考Ⅱ）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$，讨论 $f(x)$ 的单调性;

21. （2017 山东）已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$， $g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程；

（2）令 $h(x)=g(x)-af(x)$ （$a\in R$），讨论 $h(x)$ 的单调性.